

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS RAÍZES DE POLINÔMIOS E APLICAÇÃO EM ROBÔS MANIPULADORES ORTOGONAIS 3R

Itamar de Camargo Júnior¹; Paulo Roberto Bergamaschi^{2,3}

Departamento de Matemática

Campus Catalão da Universidade Federal de Goiás

icamargojunior@gmail.com; prbergamaschi@gmail.com

Palavras-Chave: discriminante, polinômios, raízes, manipuladores ortogonais 3R, singularidades.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho é resultado de estudos realizados em um projeto de Iniciação Científica desenvolvido no *Campus* Catalão da Universidade Federal de Goiás, que buscou encontrar condições sobre os coeficientes de polinômios de 2º, 3º e 4º graus para a existência ou não de raízes reais, bem como as suas multiplicidades, a partir de análise gráfica do discriminante destes polinômios. E, em um segundo momento, estudar o espaço de trabalho de robôs manipuladores ortogonais 3R.

Há muitos anos que se tem referência a métodos de cálculos e fórmulas polinomiais. Conforme abordado em Aaboe (2002), os babilônios, em 1700 a.C. já conheciam regras para encontrar raízes dos polinômios quadráticos. Em 600 a.C., os hindus também já solucionavam equações quadráticas, e os babilônios já dispunham de alguma manipulação algébrica que usavam casos especiais da fórmula quadrática (BOYER, 1974).

Durante quase três mil anos procurou-se por métodos para solucionar problemas que envolviam equações do terceiro grau. No ano de 1545, o sábio italiano Girolamo Cardano publicou em sua obra, intitulada “Ars Magna”, soluções para as cúbicas de Sipione del Ferro e a solução para as quárticas de Ludovico Ferrari (IEZZI, 1993).

Mais tarde, Paolo Ruffini, que era médico e matemático, provou, com algumas falhas em sua argumentação, a impossibilidade de resolver algebricamente a equação de grau 5 (BAUMGART, 1992). Somente no início do século XIX é que foi dada a primeira prova sem erros da impossibilidade de se resolver a equação do 5º grau, por N. H. Abel. A caracterização

¹ Aluno do Curso de Matemática do *Campus* Catalão/UFG e bolsista de Iniciação Científica.

² Professor orientador, do Departamento de Matemática do *Campus* Catalão/UFG.

³ Revisado pelo orientador.

das equações $F(x) = 0$, de grau n qualquer, que são solúveis por radicais, por meio de uma propriedade de certo grupo G_f de permutações de suas raízes, foi dada por E. Galois (BASTOS, 2004). Com isso, surgiu a teoria dos grupos e concluiu-se que a equação geral de grau $n \geq 5$ não pode ser resolvida por radicais.

Nos dias atuais, as funções polinomiais ainda são temas de investigação tanto no campo computacional como no campo teórico. Uma particular área em que se aplica é a robótica, em que o espaço de trabalho de manipuladores ortogonais 3R pode ser representado por um polinômio de grau 4 (BAILI et. al., 2003; OLIVEIRA et al., 2010; WENGER, 2007).

Neste trabalho, a partir de análise gráfica do discriminante dos polinômios de 2º, 3º e 4º graus, são apresentadas condições sobre os coeficientes destes polinômios para a presença ou não de raízes reais, bem com as suas multiplicidades. Além disso, é apresentado um estudo do espaço de trabalho de manipuladores ortogonais 3R a partir de um polinômio de grau 4.

2. OBJETIVOS

Foram dois os objetivos propostos neste trabalho. Primeiro, analisar os polinômios quadráticos, cúbicos e quárticos quanto ao número de raízes reais que eles podem apresentar, investigando o que ocorre em cada região do plano limitada pelo seu discriminante. E, segundo, estudar um polinômio de grau 4, que resolve o Modelo Geométrico Inverso e que representa o espaço de trabalho de manipuladores ortogonais 3R, relativamente a presença ou não de raízes reais triplas.

3. METODOLOGIA

O desenvolvimento do projeto de Iniciação Científica foi dividido em duas fases. Na primeira fase, um estudo dos polinômios de 2º, 3º e 4º graus foi desenvolvido em relação às raízes reais que eles podem ou não apresentar. No desenvolvimento de tal estudo fez-se uso do discriminante dos polinômios, o qual tem o papel de informar o tipo de solução que a equação polinomial possui, e neste caso, de auxiliar na obtenção de condições entre os coeficientes e as raízes do polinômio em estudo.

Nesta fase, para os casos dos polinômios de grau 3 e grau 4, algumas transformações, que são mais detalhadas na próxima seção, foram realizadas com a finalidade de reduzir o número de coeficientes dos polinômios e, com isso, simplificar a análise proposta. A partir disso, buscando informações sobre raízes que se repetem, resolveu-se um sistema formado pela equação polinomial e pela equação da derivada do polinômio. A solução de tal sistema proporcionou obter a expressão do discriminante, o qual gerou uma curva (superfície, no caso

do polinômio de grau 4) que dividiu o espaço dos coeficientes em regiões. Tomando os coeficientes dentro de cada uma das regiões, o gráfico do polinômio foi analisado quanto ao tipo de raiz real que ele possui.

Na segunda fase, o espaço de trabalho de manipuladores ortogonais 3R foi descrito e, seguindo a idéia apresentada em Oliveira et al. (2010), em Wenger (2007) e em Zein (2005), obteve-se um polinômio de grau 4. O estudo desse polinômio possibilitou identificar regiões, no espaço determinado por dois dos parâmetros que dão as dimensões do robô, onde ocorrem certos tipos de singularidades no espaço de trabalho. Tal identificação se deu a partir da observância da seção radial plana do espaço de trabalho.

4. ANÁLISE DE POLINÔMIOS DE 2º, 3º E 4º GRAUS

De maneira geral, um polinômio é uma função complexa $P_n: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, sendo \mathcal{C} o conjunto dos números complexos, definida por $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com os coeficientes a_i também sendo números complexos. Quando $a_n \neq 0$ diz-se que o polinômio P_n tem grau n .

Particularmente, têm-se os polinômios cujos coeficientes a_i são todos números reais. Assim sendo, a restrição de P_n ao conjunto \mathcal{R} dos números reais resulta em uma função polinomial de \mathcal{R} em \mathcal{R} .

Normalmente no estudo de polinômios tem-se interesse por suas raízes. A raiz de um polinômio P_n é um número complexo r tal que $P_n(r) = 0$. Quando uma raiz se repete por m vezes, diz-se que ela é raiz de *multiplicidade* m . Se $m = 1$, diz-se, simplesmente, que ela é *raiz simples*.

Observe que r é raiz do polinômio P_n se, e somente se, r é raiz deste mesmo polinômio P_n multiplicado pelo termo $1/a_n$. Ou seja, P_n e $(1/a_n)P_n$ têm as mesmas raízes, sendo que neste último o coeficiente de maior grau é 1. Assim sendo, sem perda de generalidade, pode-se supor que $a_n = 1$, e, portanto, no estudo das raízes de polinômios aqui realizado, por simplicidade, será considerado que o coeficiente de maior grau do polinômio é igual a 1.

O estudo das raízes do polinômio de grau 2 será realizado a partir da conhecida fórmula de Báskhara, da qual se extrai a expressão do determinante. Em Moreira (1994) e Lima (1987) são apresentadas algumas técnicas de resolver equações polinomiais de 3º grau e em Moreira (1994) também a de 4º grau. De modo diferente, neste trabalho, o estudo dos polinômios de graus 3 e 4 se iniciará pela busca daquelas raízes que se repetem. Se uma raiz se repete significa que ela é também raiz da derivada do polinômio. Assim, as raízes de um polinômio P_n que se repetem são aquelas que satisfazem ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P_n(x) = 0 \\ P_n'(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

4.1. Polinômios de Grau 2

Considere o polinômio de grau 2, $P_2(x) = x^2 + bx + c$. Como se está interessado no estudo das raízes, pretende-se encontrar as soluções da seguinte equação:

$$x^2 + bx + c = 0. \quad (2)$$

Para resolver a Eq. (2) basta utilizar-se do “completamento do quadrado”, o qual consiste em encontrar os valores de α e β tais que

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)^2 + \beta = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta. \quad (3)$$

Igualando os coeficientes dos polinômios na Eq. (3) tem-se que $\alpha = \frac{b}{2}$ e $\beta = c - \frac{b^2}{4}$.

Substituindo estes valores de α e β , a Eq. (2) torna-se

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c, \quad (4)$$

de maneira que as soluções da Eq. (2) são expressas da seguinte forma, conhecida por fórmula de Báskhara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad (5)$$

sendo que $D_2 = b^2 - 4c$ é chamado de discriminante do polinômio de grau 2. A Fig. (1) exibe a curva desse discriminante, dada por $D_2 = b^2 - 4c = 0$.

Os valores dos coeficientes b e c pertencentes à curva do discriminante D_2 , que é uma parábola, correspondem a polinômios que tem uma raiz de multiplicidade 2, sendo que se $b < 0$ a raiz será positiva e se $b > 0$ ela será negativa, como pode ser observado na Fig.(1). Enquanto que os valores de b e c que não pertencem à curva $D_2 = 0$ se referem a polinômios que não têm raízes que se repetem.

Os pontos (b, c) que se encontram na região abaixo da parábola correspondem a

polinômios que apresentam duas raízes reais distintas, de modo que:

- Se b e c são positivos, as duas raízes são negativas;
- Se b é negativo e c é positivo, as duas raízes são positivas;
- Se c é negativo, uma raiz é negativa e outra é positiva;
- Se $c = 0$ e $b > 0$ (isto é, sobre o eixo b positivo), uma raiz é negativa igual a $-b$ e a outra é o zero;
- Se $c = 0$ e $b < 0$ (ou seja, sobre o eixo b negativo), uma raiz é positiva igual a $-b$ e a outra é o zero.

Já aqueles pontos (b, c) localizados na região acima da parábola correspondem a polinômios que não apresentam raízes reais (Veja Fig. (1)).

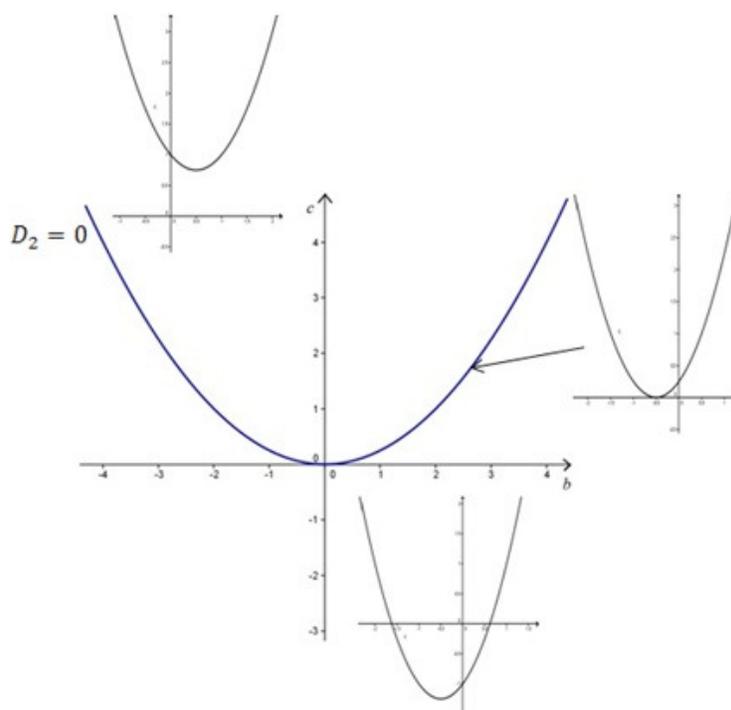


Figura 1. Gráfico do discriminante D_2 do polinômio de grau 2 e exemplos de alguns polinômios quadráticos para algumas regiões.

4.2. Polinômios de Grau 3

Seja o polinômio de grau 3 dado por $P_3(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Por um processo, conhecido por “completamento do cubo”, é possível transformar o polinômio cúbico original em outro polinômio cúbico sem o termo de segundo grau. De fato,

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 3\left(\frac{b}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{b}{3}\right)^2 x + \left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)x + d - \frac{b^3}{27} \\
&= \left(x + \frac{b}{3}\right)^3 + p\left(x + \frac{b}{3}\right) + q,
\end{aligned} \tag{6}$$

sendo $p = c - \frac{b^2}{3}$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$. Com isso, basta resolver a *equação reduzida*

$$P_3(x) = x^3 + px + q = 0. \tag{7}$$

Note que as soluções x_i da equação reduzida fornecem as raízes $x_i - \frac{b}{3}$ do polinômio cúbico original.

As raízes repetidas do polinômio cúbico dado pela Eq. (7) são soluções do sistema expresso pela Eq. (1), que neste caso, torna-se

$$\begin{cases} P_3(x) = x^3 + px + q = 0 \\ P_3'(x) = 3x^2 + p = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Da segunda equação do sistema (8), tem-se $p = -3x^2 < 0$. Substituindo na primeira equação deste sistema, obtém-se $q = 2x^3$. Assim, $\frac{q^2}{4} = x^6$ e $\frac{p^3}{27} = -x^6$. Portanto,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0. \tag{9}$$

A expressão $D_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ é chamada de discriminante do polinômio de terceiro grau, e a curva dada pela Eq. (9), $D_3 = 0$, é apresentada na Fig (2). Os pontos (p, q) pertencentes a esta curva correspondem a polinômios que têm raiz que se repete, sendo que aqueles em que $q \neq 0$ têm uma raiz real de multiplicidade 2 e a outra raiz é simples, enquanto que o ponto $(p, q) = (0, 0)$ corresponde ao polinômio com o zero como raiz de multiplicidade 3.

Já os pontos (p, q) que não pertencem à curva $D_3 = 0$ conduzem a polinômios que não apresentam raízes repetidas. Como pode ser observado na Fig. (2), a região entre os ramos da curva corresponde a polinômios que tem três raízes reais distintas, ao passo que a região externa à curva corresponde a polinômios que tem uma única raiz real, sendo, portanto, as outras duas complexas.

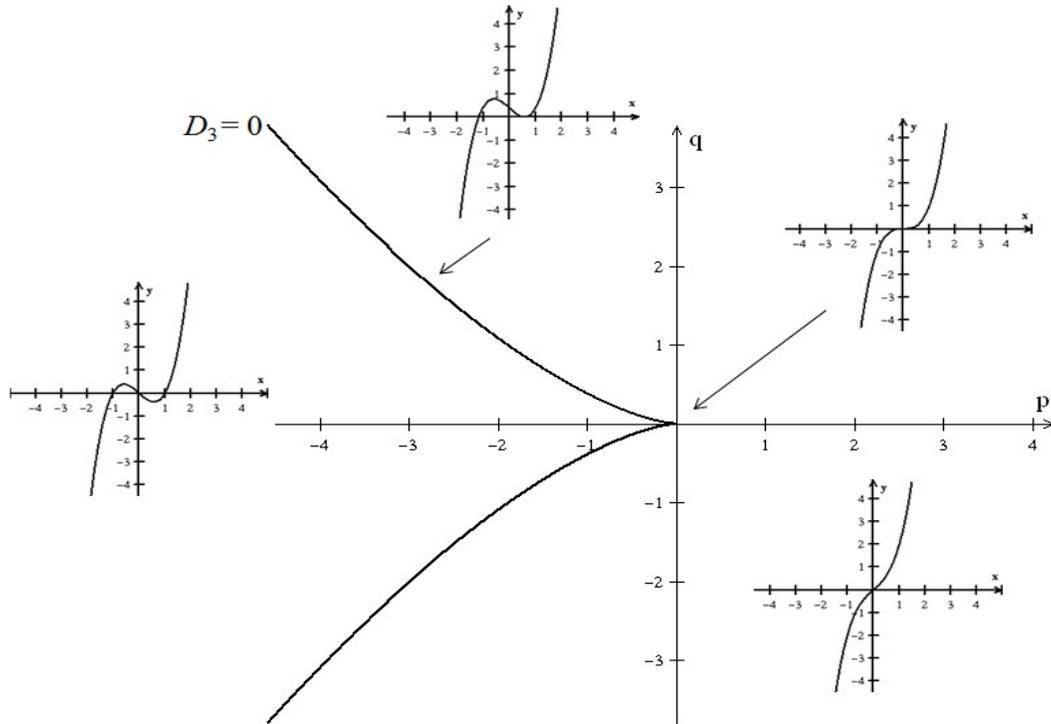


Figura 2. Gráfico do discriminante D_3 do polinômio de grau 3 e exemplos de alguns polinômios cúbicos para algumas regiões limitadas pela curva $D_3 = 0$.

4.3. Polinômios de Grau 4

De maneira semelhante ao que foi feito para o polinômio de grau 3, pelo processo de “completamento da quarta potência”, o polinômio de grau 4, $P_4(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, pode ser escrito na forma $P_4(x) = \left(x + \frac{b}{4}\right)^4 + p\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + q\left(x + \frac{b}{4}\right) + r$, com $p = c - 3\frac{b^2}{8}$, $q = d - \frac{bc}{2} + \frac{b^3}{8}$ e $r = e + \frac{b^2c}{16} - \frac{bd}{4} - \frac{3b}{256}$. Desta forma, basta considerar o polinômio de quarto grau escrito na forma reduzida

$$P_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r \quad (10)$$

Neste caso, as raízes repetidas são soluções do seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} P_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0 \\ P_4'(x) = 4x^3 + 2px + q = 0 \end{cases} \quad (11)$$

O sistema (11) fornece $q = -4x^3 - 2px$ e $r = 3x^4 + px^2$. Então, o conjunto D_4 das ternas $(p, q, r) = (p, -4x^3 - 2px, 3x^4 + px^2)$, variando os valores de p e x , descreve no espaço tridimensional de p, q e r o lugar das raízes repetidas do polinômio P_4 , descrito na Eq. (10), o qual é uma superfície que representa o discriminante deste polinômio. Assim, os pontos (p, q, r) que pertencem a esta superfície são aqueles que fornecem raízes repetidas, enquanto que os outros não.

Fixando o valor de p , os pontos (p, q, r) descrevem uma curva que é um corte da superfície. Se $p \geq 0$, a região interna à curva corresponde a polinômios que não tem raízes reais e a região externa a polinômios que têm duas raízes reais. A Fig. (3) apresenta a curva gerada quando o valor de p é negativo; neste caso, $p = -2$.

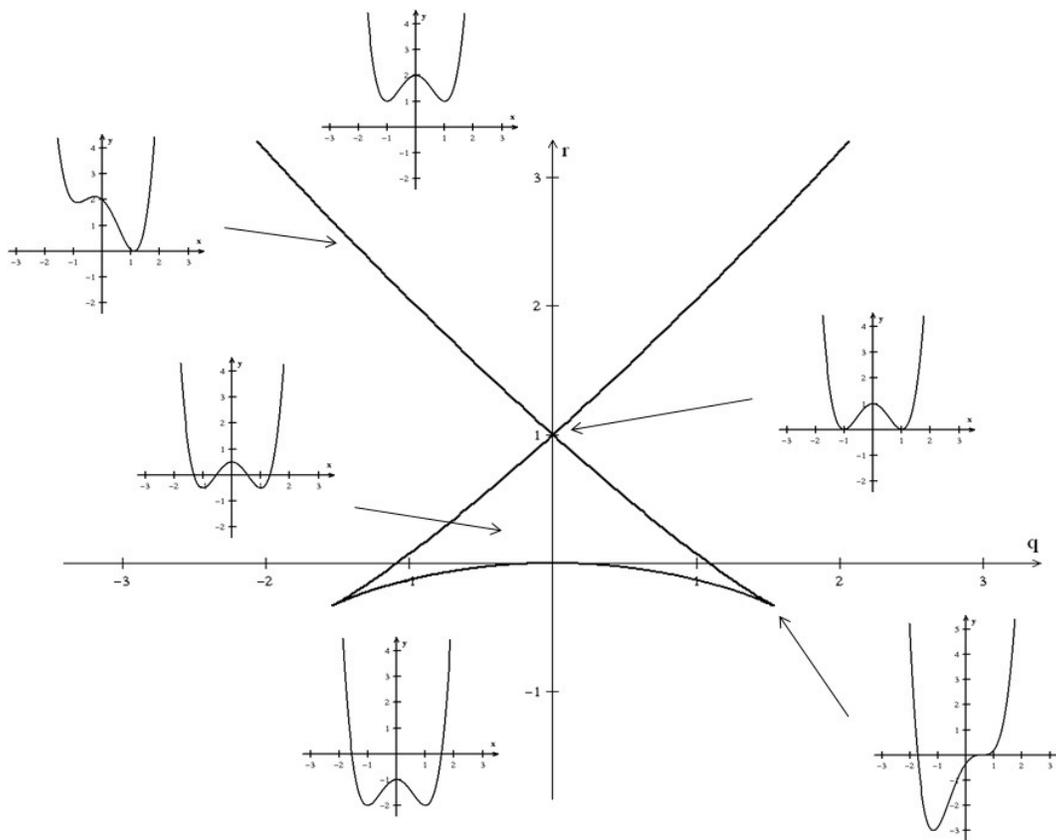


Figura 3. Curva seção do discriminante do polinômio $P(x) = x^4 + px^2 + qx + r$, para $p = -2$.

Analisando as regiões limitadas pela curva obtida quando $p = -2$, têm-se as seguintes situações:

- O interior da região conhecida como rabo de peixe, devido ao seu formato, corresponde a polinômios com quatro raízes reais distintas;
- A região abaixo da curva corresponde a polinômios com duas raízes reais distintas;
- A região interior à curva, acima do ponto de cruzamento dela, corresponde a polinômios que não tem raízes reais;
- Os pontos pertencentes à curva, exceto o de cruzamento e os dois que são “bicos” acentuados, correspondem a polinômios com uma raiz de multiplicidade 2 e duas complexas;
- O ponto de cruzamento da curva (neste caso, $(-2, 0, 1)$) é o ponto que corresponde ao polinômio que tem duas raízes de multiplicidade 2 ou duas raízes dupla;
- Os dois pontos da curva que formam “bicos” bem acentuados são correspondentes a polinômios que apresentam uma raiz de multiplicidade 3 ou tripla e a outra simples.

Os pontos que resultam em raízes reais de multiplicidade 3 ou raízes triplas são conhecidos por *pontos de cúspide* e os pontos que resultam em duas raízes reais de multiplicidade 2 são conhecidos por *pontos de nó* (ZEIN et al., 2005).

5. UM ESTUDO DE MANIPULADORES ORTOGONAIS 3R

A Fig. (4a) exibe o esquema de um robô manipulador 3R geral, em que as três juntas são rotacionais e os parâmetros $a_1, a_2, a_3, d_2, d_3, \alpha_1$ e α_2 são os parâmetros de Denavit-Hartenberg e θ_1, θ_2 e θ_3 são as variáveis de junta.

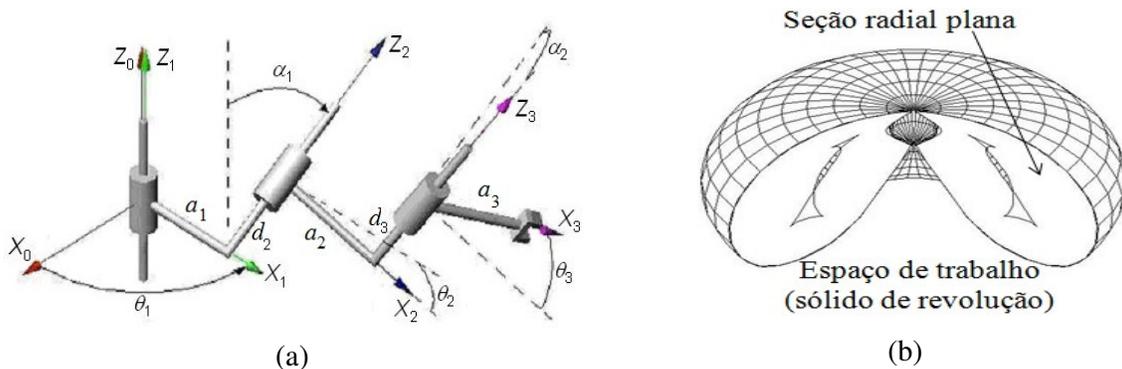


Figura 4. (a) Esquema de um robô manipulador 3R, juntamente como os parâmetros de Denavit-Hartenberg. (b) Espaço de trabalho do manipulador 3R.

Na Fig. (4b) tem-se um exemplo de um espaço de trabalho deste manipulador,

apresentando um corte radial exibindo a seção radial plana. O espaço de trabalho é o conjunto dos pontos atingíveis pela sua extremidade livre. Note que ele é um sólido de revolução.

Aqui serão estudados os manipuladores 3R em que $\alpha_1 = -90^\circ$ e $\alpha_2 = 90^\circ$, denominados robôs manipuladores 3R ortogonais, e sem defasagem sobre o último eixo, ou seja, $d_3 = 0$. Além disso, objetivando normalizar e reduzir o número de parâmetros, adota-se, sem perda de generalidade, que $a_1 = 1$. Assim, os parâmetros a serem considerados serão apenas a_2 , a_3 e d_2 . Segundo Bergamaschi (2004), após algumas manipulações algébricas, é possível descrever os pontos (x, y, z) do espaço de trabalho do manipulador ortogonal 3R, variando as variáveis das juntas, como sendo dados pelas Eqs. (12)

$$\begin{cases} x = [1 + (a_2 + a_3 \cos \theta_3) \cos \theta_2] \cos \theta_1 - (d_2 + a_3 \sin \theta_3) \sin \theta_1 \\ y = [1 + (a_2 + a_3 \cos \theta_3) \cos \theta_2] \sin \theta_1 + (d_2 + a_3 \sin \theta_3) \cos \theta_1 \\ z = -(a_2 + a_3 \cos \theta_3) \sin \theta_2 \end{cases} \quad (12)$$

A fim de obter uma condição sobre a última variável θ_3 apenas, deve-se eliminar as variáveis θ_1 e θ_2 do sistema (12). Para isto, serão adicionadas as relações trigonométricas $\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i = 1$, para $i = 1, 2, 3$, às Eqs. (12), resultando num sistema algébrico de 6 equações:

$$\begin{cases} f_1 = x - [1 + (a_3 + a_4 \cos \theta_3) \cos \theta_2] \cos \theta_1 - (d_2 + a_4 \sin \theta_3) \sin \theta_1 \\ f_2 = y - [1 + (a_3 + a_4 \cos \theta_3) \cos \theta_2] \sin \theta_1 + (d_2 + a_4 \sin \theta_3) \cos \theta_1 \\ f_3 = z + (a_3 + a_4 \cos \theta_3) \sin \theta_2 \\ f_4 = \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 - 1 \\ f_5 = \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 - 1 \\ f_6 = \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3 - 1 \end{cases} \quad (13)$$

Para a eliminação de θ_1 e θ_2 deve-se calcular uma base de Gröebner para o ideal gerado pelos polinômios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 e f_6 (OLIVEIRA et al., 2010). Tal base é formada pelos polinômios

$$p_1(\theta_3) = \cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_3 - 1 ;$$

$$p_2(\theta_3) = m_5\cos^2\theta_3 + m_4\sin^2\theta_3 + m_3\cos\theta_3\sin\theta_3 + m_2\cos\theta_3 + m_1\sin\theta_3 + m_0 \quad (14)$$

sendo

$$\begin{cases} m_0 = -x^2 - y^2 + d_2^2 + \frac{(R+1-L)^2}{4}; & m_1 = 2d_2a_3 + (L - R - 1)d_2a_3 \\ m_2 = (L - R - 1)a_2a_3; & m_3 = 2d_2a_2a_3^2; \quad m_4 = a_3^2(d_2^2 + 1); \quad m_5 = a_2^2a_3^2 \end{cases} \quad (15)$$

com $R = x^2 + y^2 + z^2$ e $L = a_3^2 + a_2^2 + d_2^2$.

Admitindo a mudança de variável $t = tg(\frac{\theta_3}{2})$, tem-se as seguintes identidades:

$$\cos \theta_3 = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \quad \text{e} \quad \sin \theta_3 = \frac{2t}{(1+t^2)} \quad (16)$$

Substituindo as identidades (16) no polinômio $p_2(\theta_3)$ expresso na Eq. (14), obtém-se o seguinte polinômio:

$$p_2(t) = \frac{m_5(1 - 2t^2 + t^4)}{(1 + t^2)^2} + \frac{4m_4t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{(m_3 - m_3t^2)2t}{(1 + t^2)^2} + \frac{(m_2 - m_2t^2)}{(1 + t^2)} + \frac{2m_1t}{(1 + t^2)} + m_0 \quad (17)$$

Fazendo as devidas simplificações, o polinômio $p_2(t)$ expresso na Eq. (17) torna-se:

$$P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e, \quad (18)$$

sendo

$$\begin{cases} a = m_5 - m_2 + m_0; & b = -2m_3 + 2m_1 \\ c = -2m_5 + 4m_4 + 2m_0; & d = 2m_3 + 2m_1; \quad e = m_5 + m_2 + m_0 \end{cases} \quad (19)$$

Se o polinômio $P(t)$, definido na Eq. (18), admitir raiz real tripla, então o manipulador é dito ser *cuspidal*; caso contrário não (ZEIN et al., 2005). Então, a identificação de

manipuladores cuspidais depende da solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} P(t, a_2, a_3, d_2, R, Z) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t}(t, a_2, a_3, d_2, R, Z) = 0 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(t, a_2, a_3, d_2, R, Z) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Oliveira et al. (2010) aborda que após eliminações de t , R e Z , utilizando ferramentas algébricas, depois de várias mudanças de variáveis e novamente usando as bases de Gröebner, é possível obter um sistema triangular, o qual permite escrever os cinco polinômios dados na Eq. (21), expressos apenas em função dos parâmetros d_2 , a_2 e a_3 :

$$\begin{cases} g_1: d_2^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0 \\ g_2: a_3^2 \left[(1 + d_2^2 + a_2^2)^2 - 4a_2^2 \right] (d_2^2 + a_2^2 - a_3^2) - d_2^2 a_2^2 = 0 \\ g_3: d_2^2 a_3 - a_2 + a_3 = 0 \\ g_4: (a_2 - 1)^2 (a_2^2 - a_3^2) + d_2^2 a_2^2 = 0 \\ g_5: (a_2 + 1)^2 (a_2^2 - a_3^2) + d_2^2 a_2^2 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

As equações g_i , expressas na Eq. (21), produzem superfícies que dividem o espaço dos parâmetros d_2 , a_2 e a_3 em regiões. Admitindo $d_2 = 1$ e escrevendo o parâmetro a_3 em função do parâmetro a_2 , obtém-se a curva C_1 descrita por g_2 , a curva C_2 descrita por g_5 , a curva C_3 descrita por g_4 , para $a_2 < 1$ e a curva C_4 descrita por g_4 , para $a_2 > 1$, as quais são dadas por:

$$\begin{cases} C_1: a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[a_2^2 + 1 - \frac{(a_2^2 + 1)^2 - a_2^2 + 1}{\sqrt{(a_2 + 1)^2 + 1} \sqrt{(a_2 - 1)^2 + 1}} \right]} \\ C_2: a_3 = \frac{a_2}{a_2 + 1} \sqrt{(a_2 + 1)^2 + 1} \\ C_3: a_3 = \frac{a_2}{1 - a_2} \sqrt{(a_2 - 1)^2 + 1}, \text{ para } a_2 < 1 \\ C_4: a_3 = \frac{a_2}{a_2 - 1} \sqrt{(a_2 - 1)^2 + 1}, \text{ para } a_2 > 1 \end{cases} \quad (22)$$

Estas curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 dividem o espaço dos parâmetros a_2 e a_3 em cinco regiões R_1 , R_2 , R_3 , R_4 e R_5 , sendo que as regiões R_1 e R_5 correspondem aos polinômios que não apresentam pontos de cúspides, as regiões R_2 e R_4 aos que apresentam 4 pontos de cúspides e a região R_3 aos que apresentem 2 pontos de cúspide (WENGER, 2007), como pode ser observado na Fig. 5.

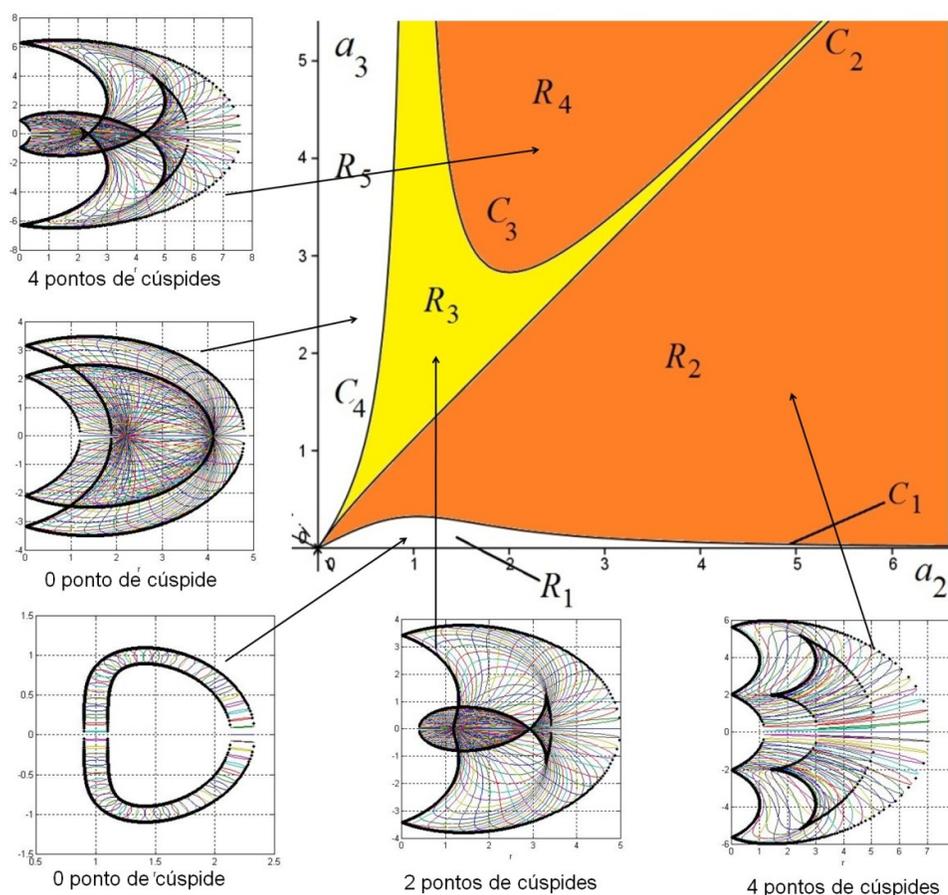


Figura 5: Seções no plano (a_2, a_3) das superfícies de singularidades, para $d_2 = 1$

6. RESULTADOS

Após as observações do comportamento dos gráficos dos polinômios de graus 2, 3, e 4 percebeu-se em que condições o respectivo polinômio apresenta ou não raiz real, bem como a sua multiplicidade. Essas condições são em relação aos valores dos coeficientes dos polinômios tomados em regiões limitadas pelo determinante do polinômio.

A partir do estudo de um polinômio de grau 4, seguindo o raciocínio de Oliveira et al. (2010) e de Wenger (2007), foi possível identificar regiões no espaço dos parâmetros onde o

manipulador não apresenta pontos de cúspide, onde apresenta dois pontos de cúspide e onde apresenta quatro pontos de cúspide.

7. CONCLUSÕES

Estudos das raízes de polinômios são importantes para o desenvolvimento de pesquisas nas diversas áreas em que se aplicam as funções polinomiais; em particular, no campo da robótica, na análise das singularidades presentes no espaço de trabalho de robôs manipuladores a partir de estudos de um polinômio de quarto grau, como é abordado em Baili et al. (2003), Oliveira et al. (2010) e Wenger (2007).

É importante salientar que diversos problemas práticos são representados por funções de expressões difíceis de manipular algebricamente e que os polinômios são frequentemente utilizados para aproximar tais funções.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2ª Ed., 2002, 178p.

BAILI, M., WENGER, P., CHABLAT, D. Classification of one family of 3R positioning Manipulators. In: **11th International Conference on Advanced Robotics**, 2003, p. 1-6 .

BASTOS, G. G. Resolução de Equações Algébricas por Radicais, **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf>>. Acesso em: 14 de março de 2011.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática**. Ed. Atual, 1992.

BERGAMASCHI, P. R., **Projeto Ótimo de Robôs Manipuladores 3R, Considerando as Características de seu Espaço de Trabalho**, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2004, 112p.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edgard Blucher, 1974.

IEZZI, G. **Complexos, Polinômios e Equações**. Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, Vol. 6, 1993.

LIMA, E. L. A Equação do Terceiro Grau. **Revista Matemática Universitária**, Nº 5, p. 9-23, Junho de 1987.

MOREIRA, C. G. T. A. Uma Solução das Equações do 3º e do 4º Graus. **Revista do Professor de Matemática**, Vol. 25, 1994, p. 23-28.

OLIVEIRA, G. T. S.; SARAMAGO, S. F. P.; NOGUEIRA, A. C. Estudo das Singularidades de Robôs Manipuladores usando Base de Groebner, In: **Anais do CNMAC**, vol. 3, 2010, p. 130-136.

WENGER, P. Cuspidal and noncuspidal robot manipulators, **Robotica**, Cambridge University Press, Vol. 25, 2007, p. 677-689.

ZEIN, M; WENGER, P. and CHABLAT, D. An Exhaustive Study of the Workspace Topologies of all 3R Orthogonal Manipulators with Geometric Simplifications. In: **Proceedings** of CK2005, 12th International Workshop on Computational Kinematics. Cassino, Italy, 2005.